# TD 3 : Corrigé rapide

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $D = \left]-2;\frac{1}{2}\right[$ , $S = \{-1\}$
2. $D = \left]\frac{1}{2};1\right[$ , $S = \{-1+\sqrt{3}\}$
3. $D = ]1;4[$ , $S = \{2\}$
4. $S = \{-\ln(2);\ln(2)\}$
5. $S = \{\ln(2)\}$
6. $D = \left]-\frac{1}{2};2\right[$ , $S = [1;2[$
7. $D = \left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ , $S = \left[-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right]$
8. $S = \mathbb{R}$
9. $D = \mathbb{R}^*$ , $S = [-1;0[\cup[2;+\infty[$

## Exercice 2

Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction $f$ définie par :

a) $f(x) = 3x+2-\ln x$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{2x+\ln x}{x}$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

c) $f(x) = \dfrac{2\ln x-1}{x}$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}-\ln x$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

e) $f(x) = \dfrac{e^x-2}{e^x+1}$ , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

f) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x+3}{x^2-1}\right)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ , $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = 0$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 0$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

g) $f(x) = xe^x-e^x+1$ , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

## Exercice 3

1. Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ :

   a) $f'(x) = \ln x$ ; b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ ; c) $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$ ; d) $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ ; e) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

2. Calculer la dérivée $f'$ de la fonction $f$ sur son ensemble de définition :

   a) $f'(x) = (2x+3)\exp(x^2+3x-1)$ ; b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ; c) $f'(x) = \exp(x+e^x)$ ; d) $f'(x) = \left(\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}\ln x}$

## Exercice 4

http://yallouz.arie.free.fr/bacannales/2007-Amerique_N/2007-Amerique_N.php?page=exo4c

## Exercice 5

http://yallouz.arie.free.fr/bacannales/2010-Amerique_S/2010-Amerique_S.php?page=exo4c

## Exercice 6

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\frac{3+x^4}{x}$.

1. $D_f=\mathbb{R}^*$.
2. $f'(x)=\dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$ et $f''(x)=\dfrac{6(x^4+1)}{x^3}$.
3. Les points critiques sont donnés par :
$$f'(x)=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=1$$
Il y a donc deux candidats $x_1=-1$ et $x_2=1$.
On utilise alors les conditions du second ordre :
$$f''(-1)=-12<0 \text{ et } f''(1)=12>0$$
**Conclusion :** $f$ admet un maximum local en $-1$ et un minimum local en $1$.
4.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-4$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Comme la fonction tend vers $+\infty$ et $-\infty$, les extremums ne peuvent pas être globaux.
5. Si on restreint l'étude à chaque intervalle du domaine de définition, on peut affirmer que $f$ admet un minimum global sur $]0;+\infty[$ en $x=1$ qui vaut 4 (on pourra remarquer que $f$ est convexe sur cet intervalle...) et un maximum global sur $]-\infty;0[$ en $x=-1$ qui vaut $-4$ (on pourra remarquer que $f$ est concave sur cet intervalle...).

## Exercice 7

**PREMIÈRE PARTIE**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-1}{x+2}$ et soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier la fonction $f$ (ensemble de définition, limites et asymptotes éventuelles, signe de la dérivée, tableau de variations).

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2} 3x^2+4x-1=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0^-$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-2} 3x^2+4x-1=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$.

La droite d'équation $x=-2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

$f$ est dérivable sur $D_f$ en tant que fraction rationnelle définie sur $D_f$ (ou quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas...dans tous les cas la justification de la dérivabilité n'est pas attendue...).

$\forall x \neq -2,\;\; f'(x) = \dfrac{(6x+4)(x+2)-(3x^2+4x-1)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3(x^2+4x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{3(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$

$\forall x \neq -2,\;\; (x+2)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+1)(x+3)$ pour tout $x \neq -2$.

On en déduit alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-14$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

2. En déduire les extrema de $f$. Les extrema de f sont-ils globaux ?

   $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;-3]$ et strictement décroissante sur $[-3;-2[$, donc $f$ admet un maximum local en $-3$ qui vaut $-14$.

   $f$ est strictement décroissante sur $]-2;-1]$ et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, donc $f$ admet un minimum local en $-1$ qui vaut $-2$.

   Comme la fonction tend vers $+\infty$ et $-\infty$, les extremums ne peuvent pas être globaux...

3. Que peut-on dire des extrema de $f$ si on restreint l'étude de $f$ à chaque intervalle du domaine de définition ?

   Si on restreint l'étude à chaque intervalle du domaine de définition, on peut affirmer que $f$ admet un maximum global sur $]-\infty;-2[$ en $x=-3$ qui vaut $-14$ (on pourra remarquer que $f$ est concave sur cet intervalle...en effet, pour les plus courageux $f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$) et un minimum global sur $]-2;+\infty[$ en $x=-1$ qui vaut $-2$ (on pourra remarquer que $f$ est convexe sur cet intervalle...).

4. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

   $f(1) = 2$ et $f'(1) = \frac{8}{3}$, d'où : $y = \frac{8}{3}(x-1)+2$, soit $T\,:\, y = \frac{8}{3}x - \frac{2}{3}$.

5. Effectuer la division euclidienne de $3x^2+4x-1$ par $x+2$.

   $\forall x \neq -2,\;\; f(x) = 3x-2+\dfrac{3}{x+2}$ ("vraie" divison euclidienne ou algorithme d'Horner...).

6. En déduire toutes les asymptotes de $\mathcal{C}$.

   $$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(3x-2)\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+2} = 0 \left( = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-2)\right)\right).$$

   La droite d'équation $y = 3x-2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

7. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

   $$\forall x \neq -2,\;\; f(x) = 0 \iff 3x^2+4x-1 = 0 \iff x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}.$$

   $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3};0\right)$ et en $\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3};0\right)$.

8. Montrer que l'équation $f(x) = e$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1;+\infty[$ (on donne $e \approx 2,7$).

   $f$ est continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ donc sur $[1;+\infty[$.
   Donc $f$ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$.

Or $e \in [2;+\infty[$.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = e$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

### DEUXIÈME PARTIE

Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \ln(f(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de $g$. On donne $\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \approx -1,5$ et $\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,2$.

   $D_g = \{x \in D_f / f(x) > 0\} = ]-2;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ (à l'aide du tableau de variations de $f$ et de I.7.) avec $x_1 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

2. Étudier les variations de $g$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

   $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ et d'après le tableau de variations de $f$, pour tout $x \geq 1$, $f'(x) > 0$ et $f(x) > 0$.
   Donc $g$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

3. Résoudre l'équation $g(x) = 1$ sur $[1;+\infty[$.

   Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) = 1 &\iff \ln(f(x)) = 1 \\ &\iff f(x) = e \text{ la fonction exponentielle réalise une bijection...non attendu sur la copie} \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$