**BTS**
**CPI2**

**Examen blanc**

Calculatrice autorisée

| | | |
|---|---|---|
| **Courbes de Bézier**<br>**Courbes B. Spline**<br>**Equations différentielles**<br>**Étude de fonction** | **29/04/2009** | **Durée : 3h** |
| | **Corrigé sur**<br>**philjolly.jimdo.com** | |

# Exercice 1

**1.**

a) $R_{0,2}(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$

b) $R_{1,2}(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$ , $R_{2,2}(t) = \frac{1}{2}t^2$

c) $P_0\,(6\,;2)$ $P_1\,(0\,;0)$ $P_2\,(0\,;6)$ $P_3\,(6\,;4)$

**2.**

a) $C_1$ est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) = 3t^2 - 6t + 3 \\ y_1 = g_1(t) = 4t^2 - 2t + 1 \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in [0\,;1].$$

b) $C_2$ est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_2 = f_2(t) = 3t^2 \\ y_2 = g_2(t) = -4t^2 + 6t + 3 \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in [0\,;1]$$

$f_2'(t) = 6t$ $g_2'(t) = -8t + 6$ Ces deux polynômes sont du premier degré : leur racine est respectivement 0 et $\frac{3}{4}$.

On en déduit le tableau des variations conjointes de $f_2$ et $g_2$.

| $t$ | $0$ | | $\frac{3}{4}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f_2'(t)$ | $0$ | $+$ | $\frac{9}{2}$ | $+$ | $6$ |
| $f_2$ | $0$ | ↗ | $\frac{27}{16}$ | ↗ | $3$ |
| signe de $g_2'(t)$ | $6$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-2$ |
| $g_2$ | $3$ | ↗ | $\frac{21}{4}$ | ↘ | $5$ |

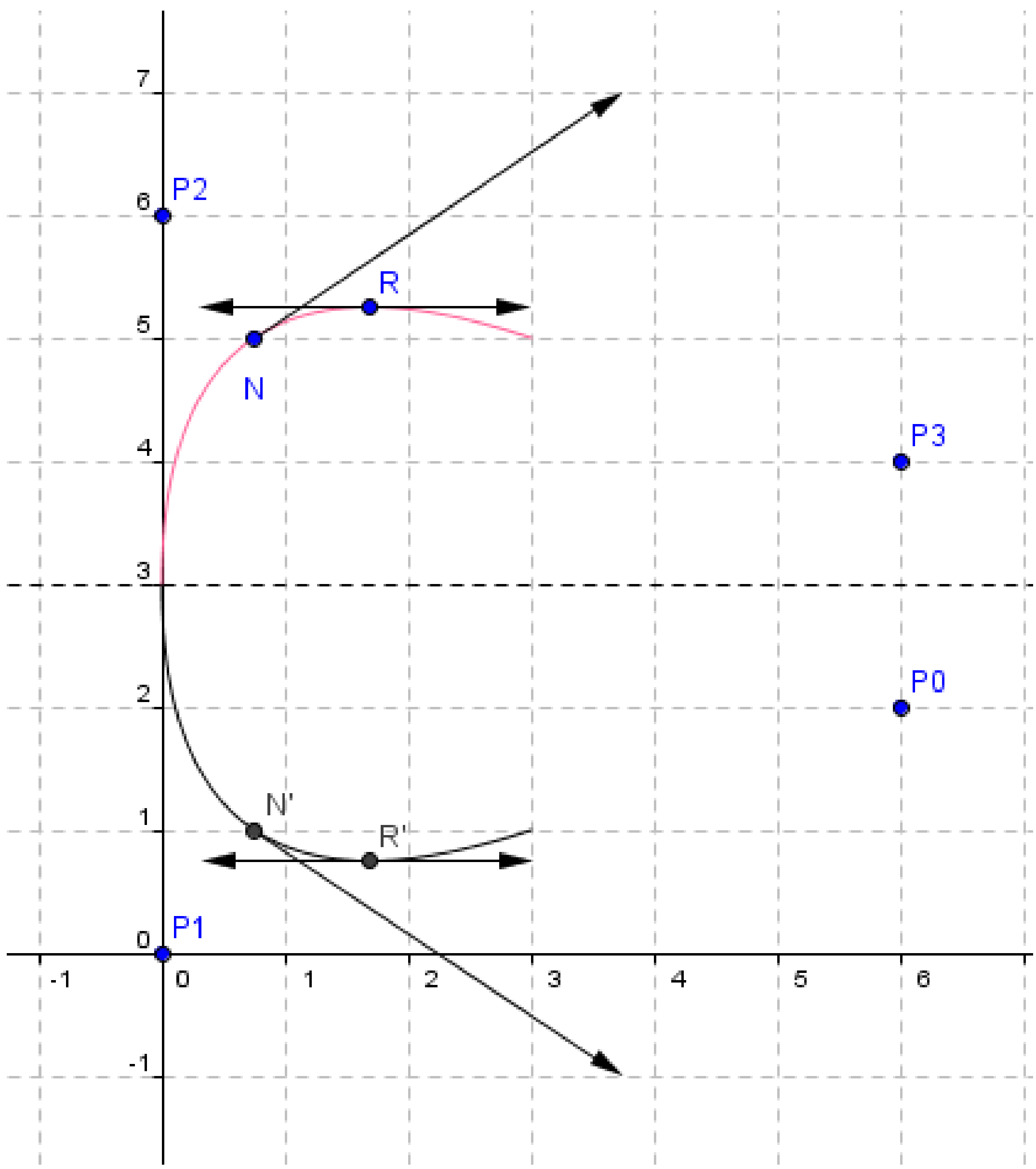
Placer alors le point $N$ de $C_2$ associé au paramètre $t = \frac{1}{2}$. On trouve $N\left(\frac{3}{4}\,;5\right)$

La tangente à $C_2$ en ce point $N$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(f_2'\,(\frac{1}{2})\,;\ g_2'\,(\frac{1}{2})\,)$

On obtient $\vec{u}\,(3\,;2)$. Le tracé du vecteur (ou de la tangente s'en déduit)

c) On admet que les courbes $C_1$ et $C_2$ sont symétriques par rapport à un axe horizontal.
Cet axe est bien sûr la droite d'équation $y = 3$.
Construire le point $N'$ symétrique de $N$ par rapport à cet axe de symétrie. Facile
Construire la tangente à $C_1$ au point $N'$. Cette tangente est aussi symétrique par rapport à la droite d'équation $y = 3$.

d) Construire enfin les deux tangentes horizontales en expliquant la méthode utilisée.
Commençons par l'arc de courbe $C_2$. $g_2'(t)$ s'annule uniquement pour $t = \frac{3}{4}$. De plus $g_2'\left(\frac{3}{4}\right)$ est non nul, donc il existe une seule tangente horizontale (au point $R$ de paramètre $\frac{3}{4}$ et de coordonnées cartésiennes $\left(\frac{27}{16}\ ;\ \frac{21}{4}\right)$. Par symétrie, la courbe $C_1$ admet elle aussi une seule tangente horizontale.
Conclusion : La courbe B. Spline admet deux tangentes horizontales en $R$ et $R'$.



## Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)e^{2x}$$

**1.**

À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.

Il suffit de poser $t = 2x$ et de signaler que la limite de $2x$ lorsque $x$ tend vers 0 est égale à 0.

**2.**

En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Il suffit de multiplier la partie régulière du DL de $e^{2x}$ par $x-1$, puis de supprimer les termes de degré supérieur ou égal à 4.

**3.**

En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $C$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $C$ et de $T$ au voisinage de ce point.

Une équation de la tangente s'obtient avec la partie régulière du DL d'ordre 1 de la fonction *f*.
On a immédiatement : $T : y = -1 - x$.
Pour la position de $C$ par rapport à *T*, il faut considérer le DL d'ordre 3. En effet, le DL d'ordre 2 ne permet pas de conclure puisque le coefficient du terme de degré 2 est égal à 0 ($a_2 = 0$).

Le coefficient $a_3$ est égal à $\frac{2}{3}$. 3 est impair $\frac{2}{3}$ est strictement positif.

On en déduit que la courbe traverse sa tangente au point d'abscisse 0. Plus précisément, la courbe est au-dessus de sa tangente sur un intervalle [0;ε] et au dessous de sa tangente sur l'intervalle [-ε;0]
Si vous avez du mal à rédiger ainsi, utiliser l'expression "'au voisinage de ce point"

**4.**

Soit $\alpha$ un réel strictement négatif; On pose

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx$$

Démontrer que

$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

On pose $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x - 1$, ce qui donne par exemple $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et nécessairement $v'(x) = 1$.

Le calcul est alors immédiat puisqu'une primitive de $uv'$ est simple à trouver. Cette primitive peut être par exemple $\frac{1}{4}e^{2x}$.

**5.**

**a.** Calculer la limite de $I(\alpha)$quand $\alpha$ tend vers $-\infty$.

**b.** À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

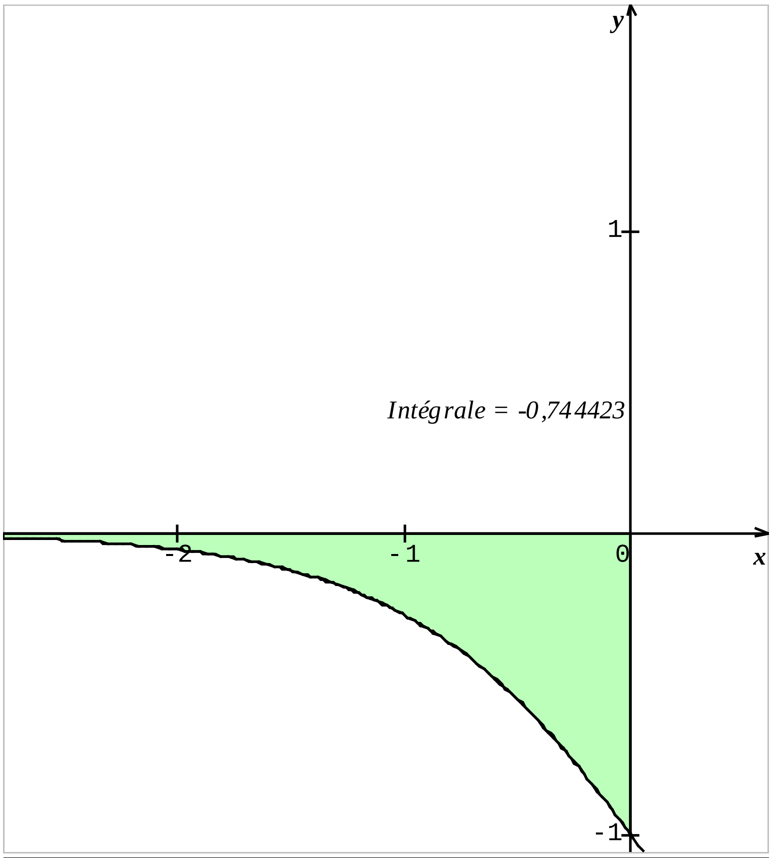
En développant, on a : $I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} - \frac{3}{4}e^{2\alpha}$.

Le premier terme a pour limite $\frac{-3}{4}$ et le troisième a pour limite 0 (quand $\alpha$ tend vers $-\infty$).

Comme $\alpha e^{\alpha}$ a pour limite 0 ainsi que $e^{\alpha}$ (quand $\alpha$ tend vers $-\infty$), on en déduit par produit que $-\frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha}$ a pour limite 0 quand $\alpha$ tend vers $-\infty$:

Par somme, on déduit que $I(\alpha)$ a pour limite $\frac{-3}{4}$quand $\alpha$ tend vers $-\infty$.

L'interprétation graphique est que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe est égal à $\frac{3}{4}$. Ce domaine n'a pas de bord gauche. Il a un bord droit, un bord supérieur et un bord inférieur. C'est un calcul de limite qui a permis de calculer son aire.
Une façon de s'en persuader est d'utiliser un logiciel et de prendre $\alpha = -20$. Le logiciel affichera comme aire 0,75 ou une valeur très voisine. Ci-dessous un essai avec le logiciel Sinequanon et $\alpha$ = –3. On s'aperçoit que l'aire est déjà très proche de 0,75. L'intégrale est bien négative puisque la fonction est négative sur ]-∞;0].



# Problème

## Partie A

On considère l'équation différentielle $(E)$ $y'' - 2y' + y = 0$, où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

**1.** Résoudre l'équation $(E)$.

$(E)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

L'équation caractéristique est $(C)$ $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$

L'équation ayant une racine double, la solution générale de $(E)$ est :

$y(x) = Ae^x + Bxe^x$

**2.** Déterminer la solution particulière de $(E)$ qui vérifie la condition suivante :

Sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A(0\,;2)$

On en déduit que $y(0) = 2 \Leftrightarrow Ae^0 + 0 = 2 \Leftrightarrow A = 2$

D'où $y(x) = 2e^x + Bxe^x$

Elle admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

*(Indications : Le coefficient directeur d'une tangente est donné par le nombre dérivé. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur)*

On calcule d'abord $y'(x)$.

$y'(x) = 2e^x + Be^x + Bxe^x$

Comme $y'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point $A$, on en déduit :

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 2 + B + 0 = 1 \Leftrightarrow B = -1$

**Conclusion : $y(x) = 2e^x - xe^x$**

## Partie B

On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = (2-x)e^x$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal, donnée en annexe.

*On pourra remarquer que f est la solution particulière de l'équation différentielle (E) obtenue dans la partie A.* Il suffit de développer pour s'en assurer.

**1.** Démontrer que la dérivée de $f$ est définie par : $f'(x) = (1-x)e^x$

Calcul direct ou on peut utiliser le calcul de la partie (A) $y'(x) = 2e^x + Be^x + Bxe^x$; en remplaçant $B$ par $-1$.

2. Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement aux points $A_0$ d'abscisse 0 et $A_2$ d'abscisse 2.

Le point $A_0$ est le point $A$ de la "partie A". La tangente au point $A_0$ a donc pour coefficient directeur 1.

L'ordonnée à l'origine est 2 puisque le point $A_0$ a pour abscisse 0.

La tangente $T_0$ au point $A_0$ a donc pour équation $\boxed{T_0 : y = x+2.}$

La tangente $T_2$ au point d'abscisse $A_2$ a pour équation : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$

Donc $T_2 : y = -e^2(x-2)+0$ $\boxed{T_2 : y = -e^2x+2e^2}$

3. On veut remplacer cette courbe $\mathscr{C}$ par la courbe de Bézier $\mathscr{C}$' associée aux trois points de définition $A_0$, $P$ et $A_2$ et ayant en $A_0$ et $A_2$ les mêmes tangentes que $\mathscr{C}$.

Calculer les valeurs exactes des coordonnées de $P$.

$P$ est le point d'intersection des droites $T_1$ et $T_2$.

*Ses coordonnées vérifient donc le système :* $\begin{cases} y = x+2 \\ y = -e^2x+2e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ x+2 = -e^2x+2e^2 \end{cases}$

*La deuxième équation a pour unique solution :* $x = \dfrac{2e^2-2}{e^2+1}$ , soit approximativement 1,523.

*L'ordonnée* $y_P$ est alors égale à $\dfrac{2e^2-2}{e^2+1}+2 = \dfrac{4e^2}{e^2+1}$, soit approximativement 3,523.

**Conclusion :** $\boldsymbol{P\left(\dfrac{2e^2-2}{e^2+1} ; \dfrac{4e^2}{e^2+1}\right)}$

4. Pour faciliter les calculs, on remplace le point $P$ par le point $A_1\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{7}{2}\right)$

On rappelle que la courbe de Bézier $(\Gamma)$ associée aux points de définition $A_0$, $A_1$, $A_2$, est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \sum_{k=0}^{k=2} C_2^k t^k (1-t)^{2-k}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}_k \text{ avec } t \in [0 ; 1].$$

a) Vérifier que les coordonnées de $A_1$ sont des valeurs approchées des coordonnées de $P$ à $10^{-1}$ près.

On a bien vérifié à la question précédente que l'erreur commise est **inférieure ou égale** à 0,1 pour chacune des deux coordonnées.

Les coordonnées de $A_1$ sont bien des valeurs approchées des coordonnées de $P$ à $10^{-1}$ près.

b) En utilisant l'interprétation barycentrique, construire le point $M$ de $(\Gamma)$ correspondant au paramètre $t = \dfrac{3}{4}$ Voir figure

c) Soit $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$.

Démontrer que $x(t) = 3t - t^2$

On admettra que $y(t) = 2+3t-5t^2$ Simples calculs

d) Étudier les variations des deux fonctions $x$ et $y$ définies sur $[0 ; 1]$.

$x'(t) = 3 - 2t \qquad y'(t) = 3 - 10t$

Ces deux polynômes sont du premier degré, avec pour racine $\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{10}$.

On en déduit :

| $x$ | 0 | | $\frac{3}{10}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x'$ | 3 | + | 2,4 | + | 1 |
| $x$ | 0 | ↗ | 0,81 | ↗ | 2 |
| signe de $y'$ | 3 | + | 0 | – | -7 |
| $y$ | 2 | ↗ | 2,45 | ↘ | 0 |

Calculer les coordonnées du point $S$ de $(\Gamma)$où la tangente est horizontale.

$S$ (0,81 ; 2,45). Il suffit de tenir compte du tableau qui montre que la dérivée $y'$ s'annule uniquement pour $t = \frac{3}{10}$. Il faut préciser de plus que $x'\left(\frac{3}{10}\right)$ est non nul:

e) Tracer $(\Gamma)$ sur le graphique joint en annexe en utilisant toutes les informations obtenues dans le problème.